Analytische Geometrie

Ellipsen

18 Prüfungsaufgaben aus Baden-Württemberg

Ich zeige hier bewusst nicht ganze Abituraufgaben, weil es darin oft sehr spezielle Fragen gibt.

Die Auswahl dieser Fragestellungen befasst sich mit grundlegenden Fragestellungen und

vielen Konstruktionen

unter Verwendung von

senkrecht-affinen Abbildungen

und der Leitkreis-Eigenschaft

Die ausführlichen Lösungen stehen nur im Originaltext

DEMO-Text Nr. 23201

Stand: 28. Juni 2024

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Aufgabe 1 - Lösung Seite 12

Gegeben sind die Punkte R(0 | 8) und T:(0 | -2). Die Strecke RT ist Durchmesser des Kreises K.

Eine senkrecht-affine Abbildung α mit der x - Achse als Affinitätsachse bildet den Punkt R auf den Punkt T und den Kreis K auf die Ellipse E ab.

a) Zeichne den Kreis K und konstruiere die Scheitel von E. Zeichne die Ellipse E.
Stelle die Gleichungen von K und E auf.

b) Bestimme die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K und E.
Die Ellipsentangenten in diesen Punkten bilden ein Dreieck. Konstruiere dieses Dreieck.
Berechne seinen Flächeninhalt.
Welchen Inhalt hat das Urbild des Dreiecks bezüglich der Abbildung α?

c) Durch die Gleichung $\frac{x^2}{25s^2}+\frac{(y-3s)^2}{(4s+1)^2}=1$ ist für jede $s \in \mathbb{R}^+$ eine Ellipse E_s gegeben.
Zeige, dass eine dieser Ellipsen der Kreis K ist.
Gehört auch E zu diesen Ellipsen?
Für welche Werte von s ist der Flächeninhalt von E_s kleiner als 15π?

Aufgabe 2 - Lösung Seite 15

Die Hauptscheitel der Ellipse E liegen auf der x-Achse. Für die Halbachsen von E gilt a:b = 4:3.

Die Gerade g: 3x + 4y = 30 berührt E im Punkt P(6 | 3).

a) Konstruiere den Mittelpunkt und die Scheitel der Ellipse E. Zeichne die Ellipse E.
Ermittle durch Rechnung die Gleichung der Ellipse E.

b) Bestimme die Gleichung des Kreises K, welcher die Ellipse E in P berührt und dessen Mittelpunkt auf der Geraden x = 9 liegt.

Der Kreis K wird durch eine senkrecht - affine Abbildung mit der x-Achse als Affinitätsachse und positivem Affinitätsverhältnis k abgebildet. Für welchen Wert von k ist der Flächeninhalt des Bildes $\overline{K}$ von K gleich dem Inhalt der Ellipse E?

c) Die Geraden y = t und y = -t mit $0 < t < 3\sqrt{2}$ schneiden die Ellipse E in den Punkten A, B, C, D.
Wie muss t gewählt werden, damit das Viereck ABCD ein Quadrat ist?

Aufgabe 3 - Lösung Seite 18

Die y-Achse und die beiden Geraden

g_1: $y = \frac{3}{8}x - 5$ und g_2: $y = -\frac{3}{8}x + 5$

begrenzen ein Dreieck.

Diesem Dreieck ist eine zur x-Achse symmetrische Ellipse E einbeschrieben.
Für ihre Halbachsen gilt a = 2 b. Ihr Mittelpunkt ist $M(a\,|\,0)$

a) Konstruiere M und die Berührpunkte B_1 und B_2 der Ellipse mit den Geraden g_1 und g_2.
(Längeneinheit 1 cm; $0 \le x \le 15$; $-10 \le y \le 10$)
Gib die Konstruktionsschritte an.

b) Stelle die Gleichung von E auf.
Berechne die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 4 - Lösung Seite 21

Gegeben ist die Raute mit den Eckpunkten $A(-8\,|\,0)$, $B(0\,|\,-4)$, $C(8\,|\,0)$, $D(0\,|\,4)$

a) Eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse ist der Raute so einbeschrieben, dass die Berührpunkte ein Quadrat bilden. Stelle die Gleichung der Ellipse auf.
Konstruiere ohne Verwendung der Ergebnisse der Rechnung die Scheitel der Ellipse. ·
Zeichne die Ellipse.

b) Der Raute ABCD ist eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse einbeschrieben,
für deren Halbachsen gilt : $a = b \cdot \sqrt{2}$.
Berechne die Koordinaten des Berührpunktes im 1. Feld.

Aufgabe 5 - Lösung Seite 23

Die Punkte $A(t\,|\,4)$, $B(-t\,|\,4)$, $C(-2t\,|\,-4)$ und $D(2t\,|\,-4)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ bilden ein Trapez, in das eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse einbeschrieben werden soll.

a) Stelle für ein allgemeines t die Gleichung der Ellipse auf und berechne die Koordinaten der Berührpunkte. Wie lauten diese Koordinaten, wenn die einbeschriebene Ellipse die Gleichung $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ hat?

b) Konstruiere für t = 4 unabhängig von den Ergebnissen der Rechnung die Scheitel der Ellipse. Gib die wesentlichen Konstruktionsschritte kurz an.

Zeichne die Ellipse. (LE 1 cm, x-Achse 7 cm vom unteren Blattrand entfernt.)

c) Für welches t ist die auf der y-Achse liegende Halbachse b größer als die Halbachse a?
Für welches t schneidet die Ellipsennormale in dem im 1. Feld gelegenen Berührpunkt aus Teilaufgabe a) die y-Achse zwischen dem Mittelpunkt und dem unteren Scheitel der Ellipse? (Mittelpunkt und unterer

Aufgabe 6 - Lösung Seite 27

Eine zur x-Achse symmetrische Ellipse E mit der Hauptachsenlänge $2a = 4\sqrt{10}$ hat den rechten Brennpunkt $F_1(10\,|\,0)$ und geht durch den Punkt $P(9\,|\,3)$.

a) Konstruiere den linken Brennpunk F_2, die Scheitel der Ellipse sowie die Tangente t in P.
Gib die Konstruktionsschritte an.
Zeichne E mit LE 1 cm in Querformat.
Stelle die Gleichung von E auf. Hinweis: Folge bei der Rechnung dem Konstruktionsweg.
Gib die Koordinaten von F_2 an.
Wie lautet die Gleichung der Tangente in P?
(Gleichung für E: $\frac{(x-5)^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$)

b) Durch die Gleichung $(x-t)^2 + y^2 = \frac{45}{4}$ ist eine Schar von Kreisen K_t gegeben.
Welche Kreise der Schar berühren die Ellipse von innen?
Berechne die Koordinaten der zugehörigen Berührpunkte.

c) Die Tangente t in P, die Normale n in P sowie die zu t und n bezüglich der Nebenachse der Ellipse symmetrischen Geraden bilden ein Drachenviereck.
Wie lautet die Gleichung des Inkreises dieses Drachenvierecks.

Aufgabe 7 - Lösung Seite 32

a) Eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse E mit dem Nebenkreisradius b = 3 geht durch $P\left(\frac{16}{5} \mid \frac{9}{5}\right)$.

Konstruiere ihre Hauptscheitel und die Tangente t_1 an E in P_1. (LE 1 cm)

Konstruiere ferner die zu t_1 parallele Ellipsentangente t_2 und die zu t_1 senkrechten Ellipsentangenten t_3 und t_4.

Zeichne E.

b) Bestimme durch Rechnung die Gleichung von E.

Aufgabe 8 - Lösung Seite 35

Eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse E_t **(t > 0)** hat das Achsenverhältnis $\frac{a}{b} = 2t$

und berührt die Gerade g_t: $y = -\frac{1}{t}x + 5$

a) Konstruiere Scheitel und Brennpunkte. der Ellipse E_1 sowie den Berührpunkt S_1 mit der Geraden g_1. (Längeneinheit 1 cm)
Erläutere die Konstruktion.
Zeichne die Ellipse.

b) Bestimme für allgemeines t die Gleichung der Ellipse E_t sowie die Koordinaten des Berührpunktes S_t mit g_t.

Für welches t erhält man einen Kreis?
Für welche Werte von t liegt die große Halbachse auf der y-Achse?

c) Der Punkt $P_t(2t \mid 3)$ liegt auf der Geraden g_t.
Von P_t aus lässt sich eine zweite Tangente h_t an die Ellipse E_t legen.
Bestimme die Gleichung von h_t.
Was für eine Kurve E_t erhält man, wenn g_t und h_t aufeinander senkrecht stehen?

Aufgabe 9 - Seite 42

a) Eine Ellipse E hat die Brennpunkte $F_1(4\,|\,0)$ und $F_2(0\,|\,0)$. $P_1(4\,|\,3)$ ist ein Ellipsenpunkt.

Konstruiere die Scheitel der Ellipse und die Tangente t_1 in P_1 an E (LE 1 cm).
Bestimme unabhängig von den Ergebnissen der Konstruktion die Gleichungen von E und t_1.

b) $F_2(0\,|\,0)$ ist gemeinsamer Brennpunkt von Ellipsen, deren anderer Brennpunkt jeweils auf der positiven x-Achse liegt. Für die Halbachsen a und b gilt: $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Bestimme die Gleichungen dieser Ellipsen E_a in Abhängigkeit von a.

Welches ist der geometrische Ort aller Nebenscheitel der Ellipsen E_a.

c) Gib die Abbildungsgleichungen der zentrischen Streckung mit dem Zentrum O an, die E_4 in E_a überführt.

d) Bestimme die Gleichungen der senkrecht-affinen Abbildungen mit der y-Achse als Achse, welche die Ellipse E_4 auf Kreise abbilden.
Gib die Gleichungen dieser Kreise an und zeichne die Kreise.

Aufgabe 10 - Seite 45

Eine Raute hat die Eckpunkte $A(8\,|\,0)$, $B(0\,|\,4)$, $C(-8\,|\,0)$, $D(0\,|\,-4)$.

Durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16 - \frac{a^2}{4}} = 1$ ist für $0 < a < 8$ eine Schar von Ellipsen E_a gegeben.

a) Zeige: Jede Ellipse E_a berührt die Raute im Punkt $Q_a\left(\frac{a^2}{8}\,|\,4 - \frac{a^2}{16}\right)$

b) Konstruiere die Halbachsen derjenigen Ellipse der Schar, welche die Raute in ihren Seitenmitten berührt und zeichne die Ellipse.
(Querformat; Längeneinheit 1 cm)
Stelle unabhängig von den Ergebnissen der Konstruktion die Gleichung dieser Ellipse auf.

Aufgabe 11 - Seite 47

Eine Ellipse E, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind, geht durch die Punkte $O(0|0)$, $A(4|0)$ und $B(0|2)$. Für ihre. Halbachsen gilt: $a : b = \sqrt{2} : 1$

a) Konstruiere den Mittelpunkt M, die Scheitel und die Brennprunkte der Ellipse E. (Querformat; LE 2 cm). Gib die Konstruktionsschritte an.
Zeichne die Ellipse.
Stelle die Gleichung der Ellipse E auf. (Ergebnis: $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$)
Berechne die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte von E.

b) Durch $y = mx + 6$ mit $m \in \mathbb{R}$ ist eine Geradenschar gegeben.
Für welche Werte von m besitzen die zugehörigen Geraden und die Ellipse·keine gemeinsamen Punkte?

c) Eine senkrecht-affine Abbildung α_k mit der x-Achse als Affinitätsachse und positivem Affinitätsverhältnis k bildet die Ellipse E·auf die Ellipse E_k ab.
Bestimme die·Gleichung von E_k. Für welchen Wert von k ergibt sich ein Kreis?
Konstruiere in der Figur der Teilaufgabe a) den Mittelpunkt dieses Kreises und zeichne den Kreis.

d) Berechne die Koordinaten der Brennpunkte von E_k.
Welche Kurve durchlaufen die Brennpunkte von E_k, wenn k alle Werte mit $0 < k < \sqrt{2}$ durchläuft?

Aufgabe 12 - Seite 52

Gegeben ist das Quadrat Q mit den Ecken A(6/0), B(0/6), C(-6/0) und D(Ol-6).

Die Abbildung $\alpha : \begin{Bmatrix} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \frac{1}{2}y \end{Bmatrix}$ führt Q in $\bar{Q}$ und den Inkreis K_1 von Q in $\bar{K}_1$ über.

a) Zeichne Q und K_1. (Längeneinheit 1 cm)
Konstruiere die Scheitel von $\bar{K}_1$ und die Berührpunkte von $\bar{K}_1$ mit Q.
Zeichne Q und $\bar{K}_1$.
Gib die Gleichungen von K_1 und $\bar{K}_1$ an .

b) Der Inkreis $\bar{K}_2$ von $\bar{Q}$ hat bezüglich α das Urbild K_2.
Konstruiere in einer neuen Figur die Scheitel von K_2 und zeichne diese Kurve. (LE1 cm).
Bestimme die Gleichung von K_2.
Zeige, dass K_2 und $\bar{K}_1$ ähnlich sind.

Aufgabe 13 - Seite 55

Eine Ellipse ist symmetrisch zu den Koordinatenachsen und geht durch $P_1\left(4\,|\,\frac{9}{5}\right)$ und $P_2\left(3\,|\,-\frac{12}{5}\right)$.

a) Ermittle die Ellipsengleichungen und die Brennpunkte.
Zeichne die Scheitel der Ellipse, ihre Brennpunkte sowie P_1 und P_2 in ein Achsenkreuz.

b) Auf der Ellipse liegen genau 4 Punkte, zu denen je zwei aufeinander senkrecht Brennstrahlen führen. Berechne die Koordinaten eines solchen Punktes S.
Berechne die Länge der beiden Brennstrahlen nach S.
Trage den im 1. Feld liegenden Punkt S und die zugehörigen Brennstrahlen in die Zeichnung ein.

c) Welche Bedingung muss das Achsenverhältnis b:a (b < a) einer Ellipse erfüllen, in denen die zugehörigen Brennstrahlen orthogonal sind?

Aufgabe 14 - Seite 58

Eine zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse E berührt die Seiten des Dreiecks $A(-12\,|\,-3)$, $B(12\,|\,-3)$, $C(0\,|\,5)$.

a) Zeichne das Dreieck und konstruiere die Scheitel der Ellipse sowie die Berührpunkte mit den Dreiecksseiten.
Gib die Konstruktionsschritte an. Zeichne die Ellipse.

b) Bestimme ohne Verwendung der Ergebnisse von Teilaufgabe a) die Gleichung der Ellipse E und die Koordinaten der Berührpunkte.

c) Eine senkrecht-affine Abbildung α mit dem Affinitätsverhältnis $k > 1$ bildet E auf einen Kreis um den Ursprung ab. Gib die Abbildungsgleichungen an.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ des Bilddreiecks.

Aufgabe 15 - Seite 61

a) Eine Ellipse E hat die Brennpunkte $F_1(0\,|\,0)$ und $F_2(0\,|\,4)$ und geht durch $P(3\,|\,4)$.

Konstruiere die Scheitel der Ellipse und die Tangente t in P an E (LE 1 cm).
Bestimme die Gleichungen von E und t durch Rechnung.

b) Für jedes $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist durch $4x^2 + 3y^2 - 3ty - \frac{9}{4}t^2 = 0$ eine Ellipse E_t gegeben.
Für welchen Wert ergibt sich die Ellipse E?

Gib die Koordinaten des Mittelpunkts und der Scheitel der Ellipse an.

Zeige, dass die Ellipsen E_t ähnlich sind und einen gemeinsamen Brennpunkt haben.

c) Gib die Abbildungsgleichungen der zentrischen Streckung α mit dem Zentrum O an, die E_t in E aus Teilaufgabe b) überführt.

Aufgabe 16 - Seite 64

Die zu den Koordinatenachsen symmetrische Ellipse E ist dem Dreieck mit den Ecken $P_1(-4\,|\,15)$, $P_2(-4\,|\,-15)$ und $Q(16\,|\,0)$ einbeschrieben.

a) Konstruiere die Berührpunkte von E mit den Seiten des Dreiecks sowie die Scheitel von E (LE 0,5 cm). Zeichne die Ellipse.

Stelle die Gleichung von E auf. (Ergebnis: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{135} = 1$)

Berechne die Koordinaten der Berührpunkte B_1 und B_2 von E mit den Dreiecksseiten P_1Q und P_2Q.

b) Die Tangente an E in $A_1(4\,|\,0)$ schneidet P_1Q in R_1 und P_2Q in R_2.

Zeige durch Rechnung, dass sich die Geraden P_1R_2 und P_2R_1 in einem Punkt der Verbindungsgeraden der Ellipsenpunkte B_1 und B_2 aus Teilaufgaben a) schneiden.

Aufgabe 17 - Seite 69

Gegeben ist der Kreis K durch $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$.

Eine senkrechte Achsenaffinität α mit der x-Achse als Affinitätsachse bildet den Kreispunkt $P(-4\,|\,3)$ auf $\overline{P}(-4\,|\,1{,}8)$ ab. Das Bild von K bei der Abbildung α ist die Ellipse $\overline{K}$.

a) Konstruiere die Scheitel von $\overline{K}$ und die zur Geraden g: $y = -\frac{3}{5}x$ parallelen Ellipsentangenten. Zeichne die Ellipse $\overline{K}$.

Gib die Abbildungsgleichungen von α an und stelle die Gleichung von $\overline{K}$ auf.

b) An $\overline{K}$ wird eine Tangente t so gelegt, dass der Tangentenabschnitt zwischen x-Achse und y-Achse im Berührpunk B halbiert wird.

Bestimme die Koordinate von B und gib die Gleichung von t an.

Aufgabe 18 - Seite 74

Gegeben ist der Kreis K: · $(x - 7)^2 + y^2 = 25$.
Durch die senkrecht-affine Abbildung α_1 mit der ·y-Achse als Affinitätsachse wird K auf die Bildellipse $\overline{K}_1$ im 2. und 3.Feld so abgebildet, dass $\overline{K}_1$ die Gerade $\overline{g}$: $8\overline{x} + 3\overline{y} + 3 = 0$ berührt.

a) Zeichne K und $\overline{g}$. (LE1 cm; Querformat).

Konstruiere das Urbild g_1 von $\overline{g}$, den Berührpunkt von $\overline{g}$ mit $\overline{K}_1$ und die Scheitel von $\overline{K}_1$.

Gib die Konstruktionsschritte an.

Zeichne· $\overline{K}_1$.

b) Berechne die Koordinaten des Berührpunktes von $\overline{g}$ mit $\overline{K}_1$.

Bestimme die Abbildungsgleichungen von α_1 und die Gleichung von $\overline{K}_1$.

Gib Mittelpunkt und Halbachsen von· $\overline{K}_1$ an.

c) Eine zweite senkrecht-affine Abbildung α_2 mit der y-Achse als Affinitätsachse bildet K auf $\overline{K}_2$ im 1. und 4. Feld so ab, dass $\overline{g}$ auch die Bildellipse $\overline{K}_2$ berührt.

Stelle die Abbildungsgleichungen von α_2 ·auf.

d) Die senkrecht-affine Abbildung α_3 mit der y-Achse als Affinitätsachse bildet $\overline{K}_1$ auf $\overline{K}_2$ ab.

Stelle die Abbildungsgleichungen von α_3 auf.

Welche Beziehung besteht zwischen $\alpha_{1,}$ α_2 und α_3?